

利用信息熵计算评价指标权重原理及实例

罗进

(武汉纺织大学 数学与计算机学院, 湖北 武汉 430073)

摘要:在对系统进行评价过程中,针对评价指标建立适当的权重,能充分反映评价体系中各指标的重要程度。选择客观赋权方法,能有效避免在评价过程中受到更多的人为因素影响。利用信息熵理论计算权重,首先需要解决为什么能利用信息熵来建立权重,讨论信息熵和权重之间的等价性,然后必须提供切实可行的计算方法。最后通过实例证明通过信息熵得到的权重,完全根据评价指标的客观数据间的关系进行计算,充分体现数据间差异性,是一种合理的客观赋权法。

关键词:信息熵;权重;客观赋权法;教育评价体系

中图分类号:C193.1

文献标识码:A

文章编号:2095-414X(2014)06-0086-04

1 引言

在评价指标体系中,同一类评价体系中每个评测指标在与其它指标相比较,其地位、重要程度和反映的情况都不相同。根据每个评价指标重要程度来确定权重,使得在这种多指标评价体系中建立权重系数成为必不可少的工作。建立权重的方法很多,一般来说主要包括主观赋权法和客观赋权法两大类。主观赋权法是根据评价者(专家)的主观经验判断,反映评价者经验积累以及对当前决策背景的主观把握^[1]。这类方法人们研究的较早,也较为成熟,主要包括专家调查法、层次分析法、多元分析法、主观加权法等^[2]。这类方法优点是解释性强,能充分反映评价体系对评价目标的指导性和前瞻性,缺点是对专家的依赖程度太大,在确权过程中其灵活性和易变性使得它具有过多的主观随意性因而客观性较差。

客观赋权法指经过对实际发生的资料进行整理、计算和分析,从而得出的权重系数。这种方法的优点是避免人为因素的影响,缺点是这类方法的研究较晚,方法不成熟,赋权结果往往不能反映评价指标的重要程度,同时如何对得到的结果进行合理解释是客观赋权法必须解决的重要问题。

2 信息熵理论及应用

1948年美国数学家香农(Shanon C.E)为解决信息的度量问题提出信息熵的概念^[3]。信息熵是信息论中用来刻画信息无序度的一个量,熵越大表示信息的无序化程度越高,相对应的信息效用越低。下面利用对区域基础教育投入的评价体系的赋权过程,来论证利用信息熵计算权重的原理和计算步骤。

首先应该根据评价体系的特点选择计算权重方法。在区域基础教育投入评价体系的研究中,在确定了评价指标以后,为体现评价体系的客观性和可操作性,我们确定评价的原则为“差异驱动”,也就是说当评价对象在某个指标的差异越大时,我们认为这个评价指标的重要性越大^[4]。因为区域内基础教育投入评价涉及的指标较多,各指标间存在相互关联和逻辑归属,对指标的赋权差异会导致评价结果出现差异,依靠主观赋权法会由于专家的地域属性而产生较大分歧。因此在这类评价中客观赋权法能更好体现评价的客观公正性。

首先建立评价体系的数学模型。假设 X 为已知的评价矩阵,其中元素 x_{ij} 表示第 i 个评价对象的第 j 个指标。对于区域基础教育投入的评价问题,其评价指标数据包括几种类型,例如区域内人口总数、教育经费等评价指标的数据为绝对数值,而成人文盲率,专任教师比例等反映的是相对数值(比例)。因此首先必须消除不同数据间量纲上的差异性。

对评价矩阵消除量纲且做归一化处理之后得到计算矩阵 Y , 其中 $0 \leq y_{ij} \leq 1$; 假设针对评价的指标已经建立了合理的权重矩阵 P , 则 p_j 表示第 j 个评价指标的权重。显然对于完成归一化以后的权重矩阵而言, 应该满足条件 $\sum p_j = 1$ 且 $p_j \geq 0$ 。为确定权重矩阵 P , 我们应该构造一个计算矩阵 Y 的函数 H 。根据权重的性质可以得到函数 H 的性质及对这些性质作出相关解释。

(1) 对称性: $H(x_1, x_2) = H(x_2, x_1)$ 。当评价对象次序改变的时候, 对同一评价指标的权重应该不变, 即计算矩阵 Y 的任意两行发生变化, 函数值应该保持不变。

(2) 单调性: 当评价指标在评价体系中更重要时, 得到的函数值应该更大。特别情况是如果只有一个评价指标, 那么它的权重为 1, 则对应的函数 H 应能取最大值。这里应该注意的是, 虽然从理论上要求函数 H 具有单调递增的性质, 但是在构造函数的时候并不需要体现出来, 我们可以在后期对一个递减函数进行修正。

(3) 连续性: 当评价对象数量确定的时候, 函数 H 对其变量 $y_1 + y_2$ 应该具有连续性, 这样才能保证最终的权重系数具有良好的计算性质。

(4) 可加性: 当 $x_2 = y_1 + y_2$, 则 $H(x_1, y_1, y_2) = H(x_1, x_2) + x_2 H(\frac{y_1}{x_2}, \frac{y_2}{x_2})$ 。当某一评价对象被划分为两个可加部分时, 则原先的函数 H 应该具有加权和性质。(显然, 这种可加性并非线性关系。)

基于以上四个原则, 我们可以构造函数

$$H(x_1 \cdots x_n) = -c \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i \quad (1)$$

这里 c 为归一化因子, 对数的底取 e 是为了计算简便, 并不影响最后计算结果, 唯一问题是 $H(x_1 \cdots x_n)$ 为单调减函数与习惯不符, 因此在计算后期必须计算离差进行修整。而公式 (1) 与信息熵的定义相同, 因此我们可以利用信息熵来计算权重。显然函数 H 满足性质 (1) - (3), 下面我们证明函数 (1) 满足性质 (4)。

定理 1: 对于函数 $H(x_1 \cdots x_n) = -c \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i$ 当满足 $x_n = y_1 + y_2$ 时, 有

$$H(x_1 \cdots x_{n-1}, y_1, y_2) = H(x_1 \cdots x_n) + x_n H(\frac{y_1}{x_n}, \frac{y_2}{x_n})$$

证明:

$$\begin{aligned} H(x_1 \cdots x_{n-1}, y_1, y_2) &= -c \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i \ln x_i + y_1 \ln y_1 + y_2 \ln y_2 \right) \\ &= -c \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i - cx_n (\ln y_n - \frac{y_1}{x_n} \ln y_1 - \frac{y_2}{x_n} \ln y_2) = H(x_1 \cdots x_n) + x_n H(\frac{y_1}{x_n}, \frac{y_2}{x_n}) \end{aligned}$$

3 利用信息熵计算权重算法及实例

3.1 信息熵计算权重算法及步骤

(1) 首先对数据矩阵 X 做归一化处理得到计算矩阵 Y ,

$$y_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_{\bullet j}}{\max x_{\bullet j} - \min x_{\bullet j}} \quad (2)$$

其中 $\max x_{\bullet j}$, $\min x_{\bullet j}$, $\bar{x}_{\bullet j}$ 分别表示数据矩阵 X 第 j 列最大值, 最小值和平均值。因为作为计算权重的熵值, 其作用并不是评价某个评价指标的实际熵值 (信息量) 大小, 而是体现对应评价指标在给定的评价体系中的作用, 反映评价指标的相对重要性。从信息论的角度来看, 它代表该问题中有多寡程度的有用信息, 因此对数据矩阵 X 处理的方式并不会减少数据本身携带信息量的多少。因此我们可以根据要评价的问题来定义归一化公式 (2)。

(2) 计算熵值。根据公式 (1), 我们可以计算每个评价指标的熵值。其中第 j 个指标的熵值为

$$H_j = -\frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^n a_{ij} \ln a_{ij} \quad (3)$$

这里取负号是因为保证熵值为正, 归一化系数定义为 $c = \frac{1}{\ln n}$ 。

(3) 计算评价指标权重。

$$w_j = \frac{1 - H_j}{n - \sum_{j=1}^m H_j} \quad (4)$$

在归一化同时改变单调性。

3.2 实例

下面我们根据上面的方法对区域范围内的基础教育投入情况进行权重计算(资料来源为中国教育统计年鉴 2013)

表 1 区域基础教育投入评价指标

	人口总数(万)	成人文盲率(15岁及以上)	人均GDP(十万)	基础教育经费总数(亿元)	生均教育经费(千元)	教育占政府财政支出比重	个人教育支出占消费比重	专任教师比例	每万人中教职工数
北京	1510	0.0275	0.8050	236.285	20.3416	0.0887	0.0517	0.7616	84.4176
上海	1681	0.0381	0.8950	235.013	18.1326	0.0678	0.0567	0.7796	73.2247
湖北	5086	0.0781	0.2550	310.548	4.3901	0.1236	0.061	0.894	93.2527
江西	3919	0.0496	0.1950	224.257	3.2038	0.1275	0.0435	0.9388	100.6316
贵州	3378	0.1321	0.1160	200.998	2.8342	0.1355	0.0481	0.9389	107.3283
云南	4046	0.1374	0.1525	295.683	4.189	0.1435	0.0273	0.9277	106.1775

利用公式(2)对表1数据进行处理后得到计算矩阵

$$Z = \begin{pmatrix} 0.4922 & 0.4516 & 0.5159 & 0.1294 & 0.6565 & 0.3395 & 0.1083 & 0.6306 & 0.2860 \\ 0.4442 & 0.3552 & 0.6315 & 0.1410 & 0.5303 & 0.6156 & 0.2567 & 0.5291 & 0.6142 \\ 0.5078 & 0.0088 & 0.1901 & 0.5485 & 0.2547 & 0.1209 & 0.3843 & 0.1162 & 0.0270 \\ 0.1814 & 0.2505 & 0.2671 & 0.2392 & 0.3224 & 0.1732 & 0.1350 & 0.3689 & 0.1894 \\ 0.3020 & 0.5002 & 0.3686 & 0.4515 & 0.3435 & 0.2784 & 0.0015 & 0.3694 & 0.3858 \\ 0.2170 & 0.5484 & 0.3217 & 0.4128 & 0.2662 & 0.3844 & 0.6157 & 0.3063 & 0.3520 \end{pmatrix}$$

对计算矩阵, 利用公式(3)和公式(4)分别计算熵值

$$H = (1.0048 \quad 0.9996 \quad 1.3145 \quad 1.0809 \quad 1.1415 \quad 1.0872 \quad 0.8573 \quad 1.1027 \quad 1.0074)$$

和权重

$$W = (0.0068 \quad 0.0006 \quad 0.1916 \quad 0.1152 \quad 0.2015 \quad 0.1242 \quad 0.2033 \quad 0.1463 \quad 0.0105)$$

3.3 实例分析评价

根据我们的计算结果可以得到如下结论, 在总共9个评价指标中, 其第1、2、9项指标对评价的贡献较低。其中第2项即成人文盲率, 对整个评价体系的影响可以忽略, 也就是成年人文盲率大小对区域范围内基础教育的投入几乎没有影响; 同时区域范围内的人口数量对基础教育投入的影响也可以忽略, 这个结论与我国全面实行义务教育的现状是相符合的。

我国当前基础教育投入的主要来源是依靠当地(省级)政府。当某区域内经济较发达, GDP较高时, 对教育投入也更大, 因此评价指标中第3项权重较大。政府对基础教育的重视程度也决定了指标权重大小, 这个方面的因素体现在人均教育投入大, 而不是总的教育投入绝对数额大这一点上, 因此第4项指标的权重大于第3项指标权重。同时个人在教育方面的支出表明区域范围内个人对教育的重视程度, 因此第7项指标权重较大。

通过以上实例的计算及分析, 我们可以看出针对评价体系的信息熵计算权重, 得到的结果更加客观有效, 能较好的排除评价体系中部分对结果影响较小的评价指标(权重小), 突出能更好反映客观规律差异性的重要指标(权重大)。由此表明利用信息熵计算权重是一种可靠的客观赋权方法。

参考文献：

- [1] 孙莹, 鲍新中. 一种基于方差最大化的组合赋权评价方法及其应用[J]. 中国管理科学, 2011, 19: 141-148.
- [2] 刘文军. 连续值域决策表的一种属性权重确定方法[J]. 模糊系统与数学, 2008, 22(3): 161-166.
- [3] 李香亭, 杨风暴. 信息熵和判断矩阵的专家聚类赋权法[J]. 火力与指挥控制, 2012, 37(3): 103-106.
- [4] 赵亚丽. 一类复杂系统的熵方法研究[D]. 北京: 中国科学院自动化研究所, 2005. 64-65.
- [5] 孙光辉. 信息熵与不确定性[J]. 青岛大学学报, 2000, 13(3): 50-51.
- [6] 刘进生, 魏毅强, 王绪柱. 区间数判断矩阵的建立及其权重计算[J]. 系统工程, 1993, 11(3): 42-52.

Principles and Examples of Using Information Entropy to Calculate Weight

LUO Jin

(School of Mathematical and Computer Sciences, Wuhan Textile University, Wuhan Hubei 430073, China)

Abstract: In the system evaluation, the establishment of appropriate weight for evaluation index is important, and it should fully reflect the importance of the evaluation system in each index. Selecting objective weighting method can effectively avoid the influence of anthropogenic factors more in the evaluation process. Firstly, we solve the question why information entropy can be used to calculate weight and discuss equivalence between entropy and weights, and then we must provide the calculation method feasible and give an algorithm. Finally, with the example, we can prove the weight obtained from information entropy. The study calculated entirely objective data evaluation based on the relationship between the fully reflects the difference between data, which is considered a reasonable and objective weighting method.

Key words: Information Entropy; Weights; Objective Weighting Method; Education Evaluation System